дает возможность применить рассмотреть любую модель в терминах теории автоматов. В таком случае:

• Состояниями автомата являются закодированные состояния системы

• Входной алфавит кодирует поступающие в систему на каждом шаге решения (в случае открытых систем)

• Выходной алфавит кодирует некоторую функцию полезности, введенную для оценки принимаемых решений. Она зависит от поставленных целей

• Функции переходов и выходов определяются взаимосвязями внутри системы, которые были установлены в процессе моделирования

В докладе предлагаются возможные постановки математических задач, имеющие как теоретический, так и практический интерес.

1. Оптимизация моделей.

2. Нахождение классов входных воздействий, обеспечивающих необходимое поведение системы (стабилизацию, рост значения какого-либо элемента и т. д.)

3. Исследование устойчивости систем.

Список литературы

1. Forrester J. W. Principles of systems. — Wright-Allen Press, 1968. — С. 10–50.

2. Forrester J. W. Urban dynamics. — Pegasus Comunications, Inc., 1999. — С. 12–16.

3. Foster R. O. The dynamics of blood sugar regulation // MIT, 1970. — С. 25–30, 41.

4. Boksha V. V. Microlithography Dynamics. Social, economic, spatial and temporal implications of developments in computing technology // MIT Thesis. — M. Sc. in Management, 2000. — P. 154.

5. Boksha V. V., Bruggeman B., O'Brien M. Microlithography cost analysis // Proceedings of Interface Symposium. — San Diego, California, 1999. — P. 10.

О МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЯХ

А. А. Петюшко (Москва)

Пусть $A = \{1, 2, ..., a\}$ и $B = \{1, 2, ...b\}, a, b < \infty$ — два конечных множества. Пусть $S = \{1, 2, ..., N\}$ — множество индексов.

Пусть $X = \{X_i |\ i \in S\}$ — многомерная случайная величина, такая что каждая компонента X_j, являющаяся одномерной случайной величиной, принимает значение x_j и определена в своем вероятностном пространстве. Для простоты будем считать, что $\forall j\ X_j$ дискретны, определены на одном вероятностном пространстве и множество значений — конечно.

Также для удобства можно представлять, что множество индексов S задает множество точек на плоскости. Соответственно, рассматриваем реализацию многомерной случайной величины X в этих точках. Введенная таким образом случайная величина X называется *случайным полем* (*Random Field*).

Совместное событие $(X_1 = x_1, ..., X_N = x_N)$, или кратко $X = x$, где $x = \{x_1, ..., x_N\}$, назовем *конфигурацией* X.

Пусть X — случайное поле со значениями на множестве A, т. е. $\forall i \in S\ x_i \in A$. Если x — какая-то конкретная конфигурация X, то χ — множество всех возможных конфигураций:

$$\chi = \{x = (x_1, ..., x_N) |\ x_i \in A\ \forall i \in S\}.$$

Введем понятие *системы соседства*: это множество $\partial = \{\partial i, i \in S\}$, где ∂i — множество элементов из S, называемое *шаблоном соседства для элемента* i, такая что:

$$\begin{cases} i \notin \partial i, \\ i \in \partial j \Leftrightarrow j \in \partial i. \end{cases}$$

Определение. Случайное поле X будем называть *марковским случайным полем* (Markov Random Field, MRF) в соответствии с системой соседства ∂ тогда и только тогда, когда $\forall i$:

$$\begin{cases} P(X = x) > 0\ \forall x \in \chi, \\ P(X_i = x_i |\ X_j = x_j,\ j \in S \backslash \{i\}) = P(X_i = x_i |\ X_j = x_j,\ j \in \partial i). \end{cases}$$

Определение. *Клика* c — множество элементов из S, т.ч. $\forall s, r \in c \Rightarrow r \in \partial s$. Заметим, что любое подмножество клики — также клика.

Пусть x_c — набор значений X_i, где $i \in c$. Введем *потенциальную функцию* $V_c(x_c)$ как любую функцию от x_c.

Определение. Дискретное распределение называется *распределением Гиббса*, если

$$\mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{c \in C} V_c(x_c)\right), \qquad (1)$$

где C — множество всех клик, а Z — нормирующая константа, тА-кая что:

$$Z = \sum_{x \in \chi} \exp\left(- \sum_{c \in C} V_c(x_c) \right). \tag{2}$$

Наиболее важной теоремой, связывающей марковские случайные поля и распределение Гиббса, является следующая

Теорема (Hammersley—Clifford) [1]. X — *марковское случайное поле* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{P}(X = x)$ — *распределение Гиббса.*

Таким образом, мы имеем возможность вычислять вероятность конфигурации для любого марковского случайного поля по формулам $(1), (2)$.

Определение. *Скрытое марковское случайное поле* (Hidden Markov Random Field, HMRF) — пара случайный полей (X, Y), т.ч. выполняются следующие условия:

1) $X = \{X_i, i \in S\}$ — так называемое "скрытое" (или, другими словами, ненаблюдаемое) марковское поле со значениями в A.

2) $Y = \{Y_i, i \in S\}$ — наблюдаемое (вовсе не обязательно марковское) случайное поле со значениями в B. Важно, что $\forall i \in S, \forall d \in A$ известны условные распределения $\mathbf{P}(Y_i|\ X_i = d)$.

3) Для любой конфигурации $x \in \chi$ случайные величины Y_i условно независимы, т. е.

$$\mathbf{P}(Y|\ X = x) = \prod_{i \in S} \mathbf{P}(Y_i|\ X_i = x_i).$$

Рассмотрим марковскую цепь с состояниями $x_0, x_1, ..., x_n$, функционирующую в дискретном времени. Построим многомерную случайную величину $X = \{X_i, i = \overline{0..n}\}$ по этой марковской цепи следующим образом: $\mathbf{P}(X_i = x_i)$ — это вероятность того, что в момент времени i мы находились в состоянии x_i. Назовем X *порожденной* случайной величиной.

Теорема 1. *Любая порожденная случайная величина — это марковское случайное поле линейной структуры.*

Теорема 2. *Любое марковское случайное поле линейной структуры — это порожденная случайная величина.*

Теперь рассмотрим скрытую марковскую модель [2] и ее связь с марковским случайным полем и скрытым марковским случайным полем.

Рассмотрим скрытую марковскую модель, функционирующую в дискретном времени. Пусть при некотором ее функционировании при проходе через состояния $x_0, x_1, ..., x_n$ на выход подавались буквы $y_0, y_1, ..., y_n$ соответственно. Рассмотрим многомерную случайную величину

$$Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_{2n+2}) = (X_0, Y_0, X_1, Y_1, ..., X_n, Y_n),$$

причем вероятность $\mathbf{P}(X_i = x_i | \ X_{i-1} = x_{i-1})$ — это вероятность перехода $a(x_{i-1}, x_i)$ из состояния x_{i-1} в состояние x_i, а вероятность $\mathbf{P}(Y_i = y_i | \ X_i = x_i)$ — это вероятность выдачи $b(y_i, x_i)$ буквы y_i в состоянии x_i. Назовем такую многомерную случайную величину *скрытой порожденной* случайной величиной.

Теорема 3. *Любая скрытая порожденная случайная величина — это скрытое случайное марковское поле линейной структуры.*

Теорема 4. *Любое скрытое марковское случайное поле линейной структуры — это скрытая порожденная случайная величина.*

Список литературы

1. Hammersley J. M., Clifford P. Markov random fields in statistics // Unpublished paper. — 1971.

2. Rabiner L. R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // Proceedings of the IEEE. — February 1989. — 77 (2). — P. 257-286.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА

А. П. Пивоваров (Москва)

Данная работа основывается на информационно-графовой модели поиска информации [1]. В этой модели перечислительная задача информационного поиска (ЗИП) представляет из себя тройку $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где X — множество запросов, V — библиотека, являющаяся конечным подмножеством множества всех возможных записей Y, а ρ — отношение поиска, заданное на $X \times Y$. При этом содержательно задача I состоит в том, чтобы для любого произвольного запроса $x \in X$ перечислять те и только те записи из V, которые находятся в отношении ρ с x.