Международный семинар «Дискретная математика-2010»

О марковских случайных полях

Петюшко А.А., Москва

Содержание

- Введение
  - MRF
  - HMRF
- Результаты
  - Связь между MRF и MC
  - Связь между HMRF и HMM
- Распределение Гиббса и теорема Хаммерсли-Клиффорда

Введение. MRF

A – конечный алфавит, $|A| < \infty$
S – множество индексов, $S = \{1, 2, ..., N\}$
X – многомерная дискретная случайная величина, $X = \{X_i |\ i \in S\}$

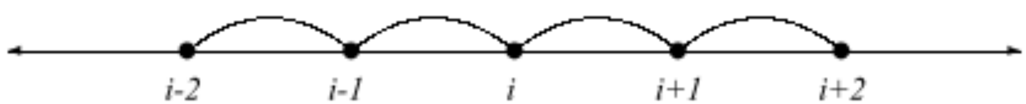
Множество индексов **S** задает точки на плоскости => **X** – **случайное поле** (**Random Field**, RF).
Рассмотрим случайное поле **X** над **A**, $\forall i \in S\ x_i \in A$
Конфигурация - совместное событие $(X_1 = x_1, ..., X_N = x_N)$, или $X = x$
Множество всех конфигураций $\chi = A^N$
Система соседства – множество шаблонов соседства.
Шаблон соседства элемента **i** – множество $\partial i \in 2^S$

$$\begin{cases} i \notin \partial i, \\ i \in \partial j \Leftrightarrow j \in \partial i. \end{cases}$$

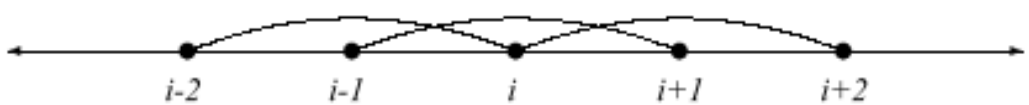
Случайное поле X в соответствии с системой соседства - **марковское случайное поле** (**Markov Random Field**, MRF) тогда и только тогда, когда для всех **i**

$$\begin{cases} P(X = x) > 0\ \forall x \in \chi, \\ P(X_i = x_i |\ X_j = x_j,\ j \in S \backslash \{i\}) = P(X_i = x_i |\ X_j = x_j,\ j \in \partial i) \end{cases}$$

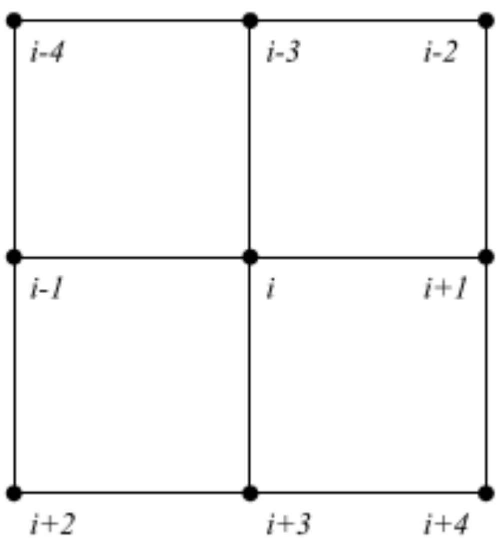
Введение. Примеры



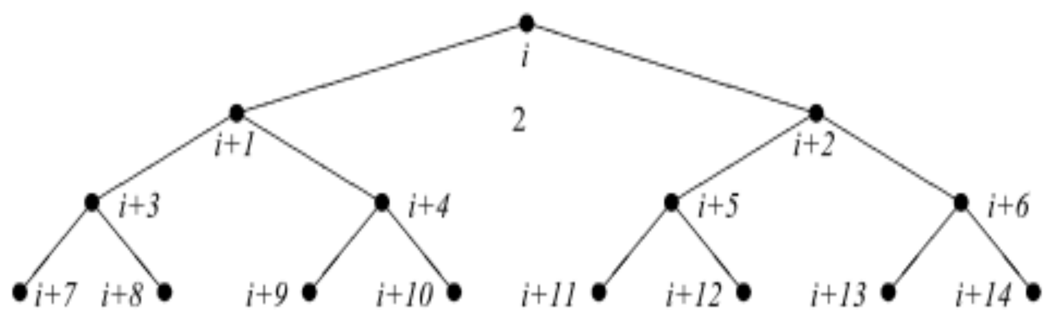
$$P(X_i | X_{i-1}, X_{i+1})$$



$$P(X_i | X_{i-2}, X_{i+2})$$



$$P(X_i | X_{i-3}, X_{i-1}, X_{i+1}, X_{i+3})$$



$$P(X_{i+1} | X_i, X_{i+3}, X_{i+4})$$

Введение. HMRF

Скрытое марковское случайное поле (**Hidden Markov Random Field**, HMRF) – это **пара** случайный полей **(X,Y)**, т.ч. выполняются следующие условия:

1. **X** - так называемое "скрытое" (***ненаблюдаемое***) марковское поле со значениями в **A** над **S**.
2. **Y** - ***наблюдаемое*** (вовсе не обязательно марковское!) случайное поле со значениями в **B** над **S**. Важно, что $\forall i \in S, \forall d \in A$ известны условные распределения $\mathbf{P}(Y_i|\ X_i = d)$
3. Для любой конфигурации $x \in \chi$ случайные величины Y_i условно независимы, т.е.

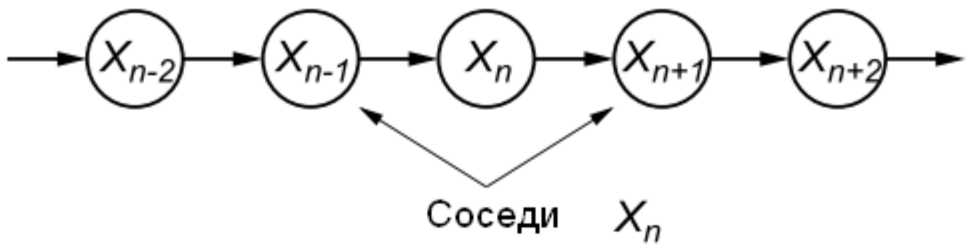
$$\mathbf{P}(Y|\ X = x) = \prod_{i \in S} \mathbf{P}(Y_i|\ X_i = x_i).$$

Обычно практической целью является восстановление скрытой конфигурации (шумоочистка, например), т.е. нахождение $\underset{x}{argmax}\ \mathbf{P}(X = x|Y = y)$

Результаты. Связь MRF и MC

Марковская цепь (**Markov Chain**, MC) – это *случайный процесс*, в то время как **марковское случайное поле** – *многомерная случайная величина*. Поэтому сравнение «напрямую» этих объектов **некорректно**. Будем проводить сопоставление *опосредованно*.

Рассмотрим марковскую цепь, функционирующую в дискретном времени (т.е. мы побывали в состояниях $x_0, x_1, ..., x_n,$).



Построим многомерную случайную величину $X = \{X_i, i = \overline{0..n}\}$ по марковской цепи следующим образом: $\mathbf{P}(X_i = x_i)$ - это вероятность того, что в момент времени **i** мы находились в состоянии x_i. Назовем **X** – *порожденной* случайной величиной.

Теорема.

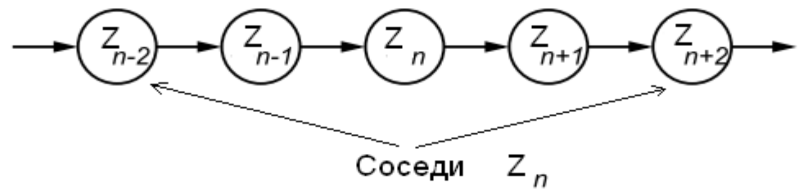
1. Любая порожденная с.в. – марковское случайное поле линейной структуры.
2. Любое марковское случайное поле линейной структуры – порожденная с.в.

Результаты. Связь HMRF и HMM

Ситуация аналогична сопоставлению MRF и MC. Рассмотрим **скрытую марковскую модель** (**Hidden Markov Model**, HMM), функционирующую в дискретном времени. Пусть при некотором ее функционировании при проходе через состояния $x_0, x_1, ..., x_n,$ на выходе были буквы $y_0, y_1, ..., y_n$ соответственно. Построим многомерную случайную величину

$$Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_{2n+2}) = (X_0, Y_0, X_1, Y_1, ..., X_n, Y_n)$$

причем $\mathbf{P}(X_i = x_i | \ X_{i-1} = x_{i-1})$ - это вероятности переходов, а $\mathbf{P}(Y_i = y_i | \ X_i = x_i)$ - это вероятности выдачи букв.



Назовем такую многомерную случайную величину *скрытой порожденной* случайной величиной.

Теорема.

1. Любая скрытая порожденная с.в. - скрытое марковское случайное поле линейной структуры.
2. Любое скрытое марковское случайное поле с линейной структурой - скрытая порожденная с. в.

Распределение Гиббса и теорема Хаммерсли-Клиффорда

Клика c – множество элементов из **S**, т.ч. $\forall s, r \in c \Rightarrow r \in \partial s$. Минимальная клика – одноэлементное множество.

Пусть x_c - набор значений X_i где $i \in c$. *Потенциальная функция* $V_c(x_c)$ - любая функция от x_c (например, **log**).

Распределение Гиббса – дискретное распределение при

$$\mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{c \in C} V_c(x_c)\right)$$

где **C** – множество всех клик, а **Z** – нормирующая константа, т.ч.

$$Z = \sum_{x \in \chi} \exp\left(-\sum_{c \in C} V_c(x_c)\right)$$

Теорема (*Hammersley-Clifford*, 1971). **X** – марковское случайное поле $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X = x)$ - распределение Гиббса.