Международная научная конференция «Ломоносов-2011»
Секция «Математика и механика»

О применении марковских случайных полей в шумоочистке

Петюшко А.А.
МГУ им. М.В. Ломоносова

Содержание

- Введение
  - MRF
  - Примеры
  - Распределение Гиббса и теорема Хаммерсли-Клиффорда
- Датчик Гиббса
- Условное MRF
- Результаты экспериментов

Введение. MRF

A – конечный алфавит, $|A| < \infty$

S – множество индексов, $S = \{1, 2, ..., N\}$

X – многомерная дискретная случайная величина, $X = \{X_i |\ i \in S\}$

Множество индексов **S** задает точки на плоскости => **X** – **случайное поле** (**Random Field**, RF).

Рассмотрим случайное поле **X** над **A**, $\forall i \in S\ x_i \in A$

Конфигурация - совместное событие $(X_1 = x_1, ..., X_N = x_N)$, или $X = x$

Множество всех конфигураций $\chi = A^N$

Система соседства – множество шаблонов соседства.

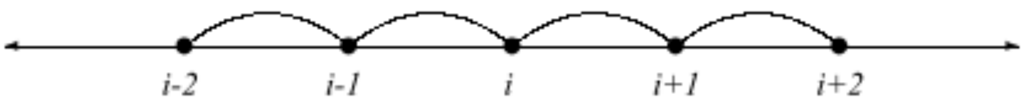
Шаблон соседства элемента **i** – множество $\partial i \in 2^S$

$$\begin{cases} i \notin \partial i, \\ i \in \partial j \Leftrightarrow j \in \partial i. \end{cases}$$

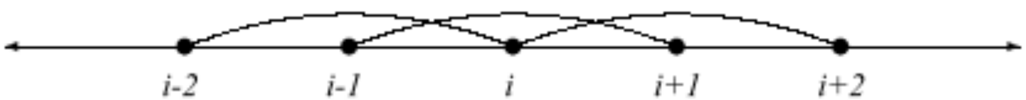
Случайное поле X в соответствии с системой соседства - **марковское случайное поле** (**Markov Random Field**, MRF) тогда и только тогда, когда для всех **i**

$$\begin{cases} P(X = x) > 0\ \forall x \in \chi, \\ P(X_i = x_i |\ X_j = x_j,\ j \in S \backslash \{i\}) = P(X_i = x_i |\ X_j = x_j,\ j \in \partial i) \end{cases}$$

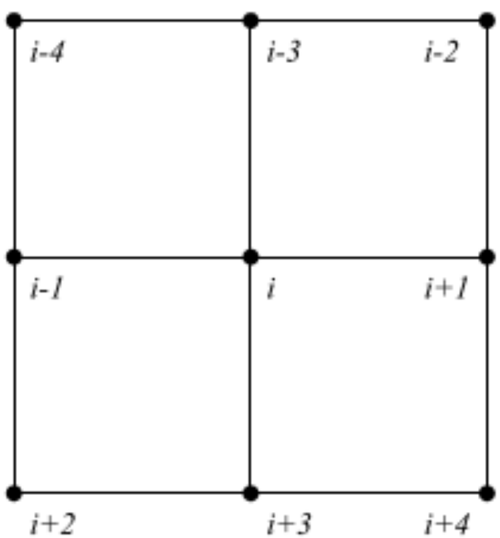
Введение. Примеры



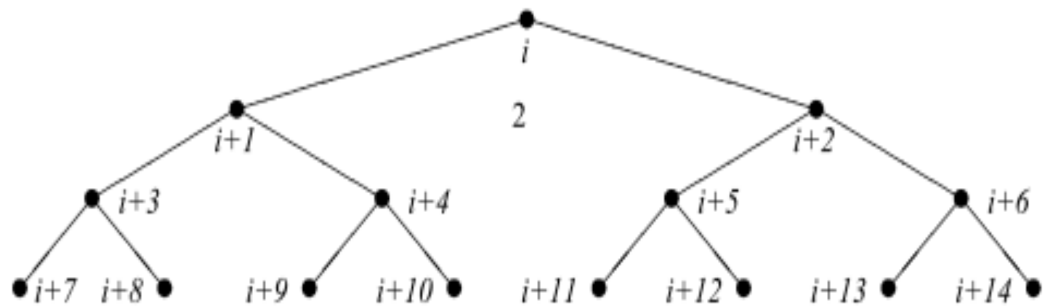
$$P(X_i|X_{i-1}, X_{i+1})$$



$$P(X_i|X_{i-2}, X_{i+2})$$



$$P(X_i|X_{i-3}, X_{i-1}, X_{i+1}, X_{i+3})$$



$$P(X_{i+1}|X_i, X_{i+3}, X_{i+4})$$

Распределение Гиббса и теорема Хаммерсли-Клифорда

Клика c – множество элементов из **S**, т.ч. $\forall s, r \in c \Rightarrow r \in \partial s$. Минимальная клика – одноэлементное множество.

Пусть x_c - набор значений X_i где $i \in c$. *Потенциальная функция* $V_c(x_c)$ - любая функция от x_c (например, **log**).

Распределение Гиббса – дискретное распределение при

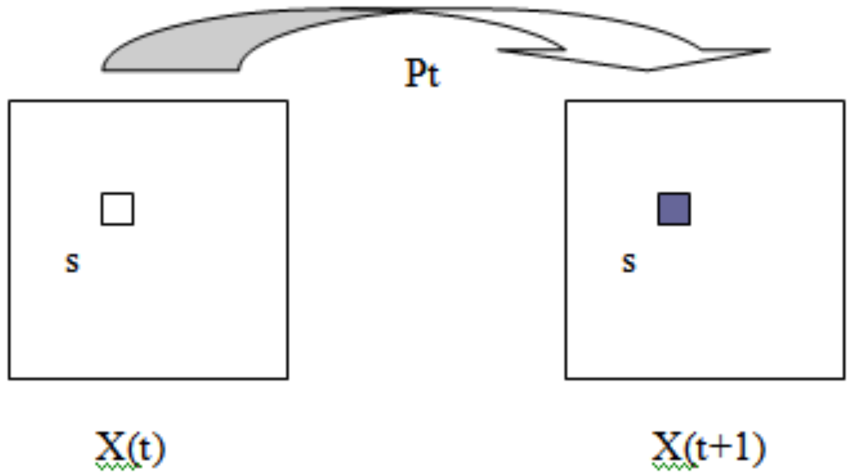
$$\mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{c \in C} V_c(x_c)\right)$$

где **C** – множество всех клик, а **Z** – нормирующая константа, т.ч.

$$Z = \sum_{x \in \chi} \exp\left(-\sum_{c \in C} V_c(x_c)\right)$$

Теорема (*Hammersley-Clifford*, 1971). **X** – марковское случайное поле $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X = x)$ - распределение Гиббса.

Датчик Гиббса



Цель: построить датчик марковского случайного поля.
Решение: конструирование эргодической марковской цепи (с вероятностью перехода **X(t)** $\longrightarrow$ **X(t+1)** **Pt**), состояния которой – конфигурации MRF.
Две реализации **X(t)** и **X(t+1)** отличаются не более чем в одной точке x_s
Вероятность перехода (биноминальное распр-ие) легко вычисляется из распределения Гиббса:

$$P_t = P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \neq s) = \frac{1}{Z_s} \exp\left(-\sum_{c:s\in c} V_c(x_c)\right)$$, где $$Z_s = \sum_{x_s} \exp\left(-\sum_{c:s\in c} V_c(x_c)\right)$$

Справедлива следующая
Теорема (*Geman*, 1984). $\forall x, x_0 \lim_{t\to\infty} P(X(t) = x | X(0) = x_0) = \pi(x)$, где $\pi(x)$ - распределение Гиббса на **x**.

Условное MRF

Обозначим $U(x) = \sum_{c \in C} V_c(x_c)$.

Пусть **D** - заданное на множестве индексов **S** случайное поле, а **d** - его конфигурация, которая соответствует зашумленному **x**, т.е. $d_i = x_i + n_i, i \in S$. При этом будем полагать, что компоненты шума независимы и одинаково распределены по нормальному закону, т.е.

$n_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Назовем **распределением условного MRF** распределение **p(X|D)**.

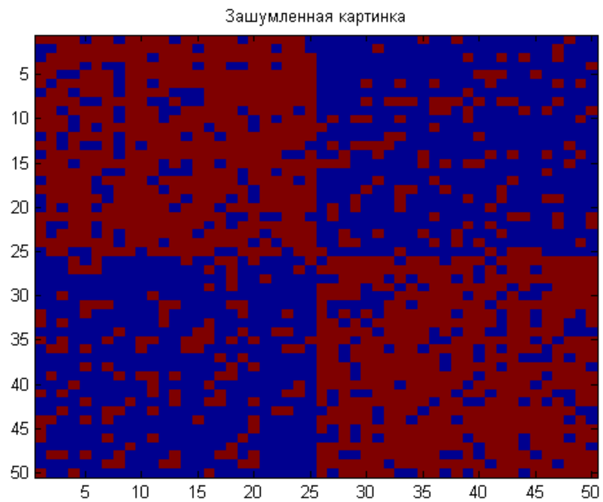
Теорема. $\mathbf{P}(X = x|\ D = d) = \frac{1}{Z_1} \exp\left(-U(x) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i \in S} (\mu - (d_i - x_i))^2\right)$

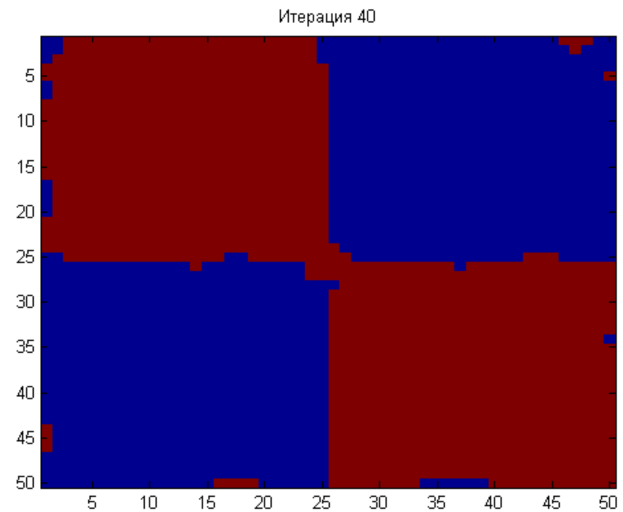
Следствие. **p(X|D)** – распределение Гиббса.

Запуск датчика Гиббса на зашумленном изображении при условии:

- Изображение монохромно
- Параметры гауссова шума (μ, σ^2) известны
- Любая потенциальная функция на клике мощности 2 – это сумма по модулю два $x_1 \oplus x_2$
- Система соседства типа «крест»
- Начальное приближение – зашумленное изображение

Результаты экспериментов





Mu = 0
Sigma = 0.6